

Beoordelingsmodel

Vraag

Antwoord

Scores

Stijgend en horizontaal

1 maximumscore 3

- $f(x) = x^5 - 3x^{1\frac{1}{2}}$ 1
- $f'(x) = 5x^4 - 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ 1
- $f'(1) = \frac{1}{2}$ en dit is groter dan 0 (dus de grafiek van f stijgt in A) 1

Opmerking

Als in het derde antwoordelement de positieve x-coördinaat van de top van de grafiek van f wordt berekend, gevolgd door een exact argument, waaruit volgt dat deze x-coördinaat kleiner is dan 1, dan mag het derde scorepunt worden toegekend.

2 maximumscore 4

- Als p de x -coördinaat van P is, dan is de x -coördinaat van Q gelijk aan $p + \frac{1}{2}$ 1
- De vergelijking $p^5 - 3p\sqrt{p} = (p + \frac{1}{2})^5 - 3(p + \frac{1}{2})\sqrt{p + \frac{1}{2}}$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- (Dit geeft $p = 0,6827\dots$, dus) het eindantwoord is 0,683 1

Wachttijden

3 maximumscore 3

- Het gevraagde percentage is $\int_0^3 50e^{-\frac{1}{2}t} dt$ 1
- Een primitieve van $50e^{-\frac{1}{2}t}$ is $-100e^{-\frac{1}{2}t}$ 1
- $\int_0^3 50e^{-\frac{1}{2}t} dt = \left[-100e^{-\frac{1}{2}t} \right]_0^3 (= -100e^{-\frac{3}{2}} + 100 = 77,68\dots)$, dus het eindantwoord is 77,7(%) 1

4 maximumscore 3

- Uit $y = \left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\right)e^{at}$ volgt $y = \frac{1}{a}te^{at} - \frac{1}{a^2}e^{at}$ 1
- $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}t\right) \cdot e^{at} + \frac{1}{a}t \cdot \frac{d}{dt}(e^{at}) - \frac{a}{a^2}e^{at}$ 1
- $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a} \cdot e^{at} + \frac{a}{a}t \cdot e^{at} - \frac{a}{a^2}e^{at}$ en dus $\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\right)e^{at}\right) = te^{at}$ (dus het is een juiste primitieve) 1

of

- $\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\right)e^{at}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\right) \cdot e^{at} + \left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\right) \cdot \frac{d}{dt}e^{at}$ 1
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{a}$ en $\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$ 1
- $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a} \cdot e^{at} + \left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\right) \cdot ae^{at} = \frac{1}{a} \cdot e^{at} + \frac{1}{a}t \cdot ae^{at} - \frac{1}{a^2} \cdot ae^{at}$ en dus $\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\right)e^{at}\right) = te^{at}$ (dus het is een juiste primitieve) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

5 maximumscore 4

- $t_{\text{gemiddeld}} = \frac{50}{100} \cdot \int_0^{20} t \cdot e^{-\frac{1}{2}t} dt$ 1
- Een primitieve van $y = t \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$ is $(-2t - 4) \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$ 1
- Invullen van de grenzen in de primitieve geeft $-44 \cdot e^{-10} + 4$ (of 3,99...) 1
- (Dus $t_{\text{gemiddeld}} = 1,99\dots$,) dus het eindantwoord is 2 (minuten) 1

Verschuiven

6 maximumscore 6

- $f'(x) = 6(3x - 7)$ 2
 - $f'(x) = -6$ exact oplossen geeft $x = 2$ 1
 - $f(2) = 1$; het origineel van A is dus het punt met coördinaten $(2, 1)$ 1
 - Dus de grafiek van f is $(5 - 2 =) 3$ naar rechts verschoven en $(40 - 1 =) 39$ omhoog 1
 - Dus $g(x) = (3(x - 3) - 7)^2 + 39$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- of
- Het functievoorschrift van g is te schrijven in de vorm $g(x) = (3(x - a) - 7)^2 + b$ 1
 - $g'(x) = 6(3(x - a) - 7)$ 2
 - $6(3(5 - a) - 7) = -6$ exact oplossen geeft $a = 3$ 1
 - Er moet gelden $g(5) = (3(5 - 3) - 7)^2 + b = 40$ 1
 - Dit geeft $b = 39$ (dus $g(x) = (3(x - 3) - 7)^2 + 39$) 1
- of

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

- Het functievoorschrift van g is te schrijven in de vorm

$$g(x) = (3x - a)^2 + b \quad 1$$
- $g'(x) = 6(3x - a) \quad 2$
- $6(3 \cdot 5 - a) = -6$ exact oplossen geeft $a = 16 \quad 1$
- Er moet gelden $(3 \cdot 5 - 16)^2 + b = 40 \quad 1$
- Dit geeft $b = 39$ (dus $g(x) = (3x - 16)^2 + 39$) $\quad 1$

of

- Het functievoorschrift van g is te schrijven in de vorm

$$g(x) = 9x^2 + ax + b \quad 2$$
- $g'(x) = 18x + a \quad 1$
- $18 \cdot 5 + a = -6$ exact oplossen geeft $a = -96 \quad 1$
- Er moet gelden $9 \cdot 5^2 + -96 \cdot 5 + b = 40 \quad 1$
- Dit geeft $b = 295$ (dus $g(x) = 9x^2 - 96x + 295$) $\quad 1$

Opmerking

Als in het eerste antwoordelement van het eerste antwoordalternatief of in het tweede antwoordelement van het tweede of derde antwoordalternatief de kettingregel niet is gebruikt, mogen voor dit antwoordelement geen scorepunten worden toegekend. Als de kettingregel wel is gebruikt, maar niet correct, mag voor dit antwoordelement hoogstens 1 scorepunt worden toegekend op basis van vakspecifieke regel 1.

Logaritme, wortel en exponent

7 maximumscore 5

- Voor een punt (x, y) op de grafiek van g geldt $x = {}^2 \log(\sqrt{1+8^y})$ 1
- Hieruit volgt $2^{2x} = 1+8^y$ 1
- De rest van de herleiding tot $y = {}^8 \log(2^{2x}-1)$ (dus $g(x) = {}^8 \log(2^{2x}-1)$) 1
- Beschrijven hoe de minimale waarde van $f(x)-g(x)$ kan worden bepaald 1
- (Dit is 0,956... dus) het eindantwoord is 0,96 1

8 maximumscore 6

- Er moet gelden $f(p+1) - f(p) = 3$ 1
- Dus ${}^2 \log\left(\frac{\sqrt{1+8^{p+1}}}{\sqrt{1+8^p}}\right) = 3$ 1
- Hieruit volgt $\frac{1+8^{p+1}}{1+8^p} = 64$ 1
- Hieruit volgt $64 + 64 \cdot 8^p = 1 + 8^{p+1}$ 1
- Dus $56 \cdot 8^p = -63$ (of $7 \cdot 8^{p+1} = -63$) 1
- Deze vergelijking heeft geen oplossingen, dus er is geen waarde van p voor welke geldt $y_Q - y_P = 3$ 1

Klavertje drie

9 maximumscore 5

- Er geldt $4\cos(t + \pi) = -4\cos(t)$ 1
- Er geldt $\cos(4(t + \pi)) = \cos(4t)$ 1
- Uit ($x_P = x_Q$, dus) $4\cos(t) + \cos(4t) = 4\cos(t + \pi) + \cos(4(t + \pi))$ volgt
 $4\cos(t) + \cos(4t) = -4\cos(t) + \cos(4t)$, dus $8\cos(t) = 0$ 1
- Dit geeft $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ 1
- Invullen in y_P en y_Q geeft $PQ = 8$ (in beide situaties) 1

of

- Er geldt $\cos(4(t + \pi)) = \cos(4t)$ 1
- Uit ($x_P = x_Q$, dus) $4\cos(t) + \cos(4t) = 4\cos(t + \pi) + \cos(4(t + \pi))$ volgt
 $4\cos(t) = 4\cos(t + \pi)$ 2
- Een berekening of redenering waaruit volgt $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ 1
- Invullen in y_P en y_Q geeft $PQ = 8$ (in beide situaties) 1

10 maximumscore 6

- De afgeleide van $\cos(4t)$ is $-4\sin(4t)$ 1
- De afgeleide van $\sin(4t)$ is $4\cos(4t)$ 1
- $\frac{dy}{dt} = 4\cos(t) + 4\cos(4t)$ en $\frac{dx}{dt} = -4\sin(t) - 4\sin(4t)$ 1
- De helling van de raaklijn is $\frac{4\cos(t) + 4\cos(4t)}{-4\sin(t) - 4\sin(4t)}$ 1
- Op $t = \frac{2}{3}\pi$ is de helling van de raaklijn
 $(\frac{4\cos(\frac{2}{3}\pi) + 4\cos(4 \cdot \frac{2}{3}\pi)}{-4\sin(\frac{2}{3}\pi) - 4\sin(4 \cdot \frac{2}{3}\pi)}) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ 1
- $(\tan(30^\circ) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, dus) de gevraagde hoek is 30° 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

- De afgeleide van $\cos(4t)$ is $-4\sin(4t)$ 1
- De afgeleide van $\sin(4t)$ is $4\cos(4t)$ 1
- $\frac{dy}{dt} = 4\cos(t) + 4\cos(4t)$ en $\frac{dx}{dt} = -4\sin(t) - 4\sin(4t)$ 1
- Op $t = \frac{2}{3}\pi$ is een richtingsvector van de raaklijn gelijk aan $\begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ -4 \end{pmatrix}$ 1
- (Een richtingsvector van de x -as is $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus) voor de hoek ϕ tussen de raaklijn en de x -as geldt $\cos(\phi) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ -4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1
- $(\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus) de gevraagde hoek is 30° 1

Halve cirkel

11 maximumscore 4

- Een vergelijking van c is $(x-1)^2 + y^2 = 2^2$ (en hieraan voldoen de coördinaten van P) 1
 - Voor de coördinaten van P geldt $x^2 + y^2 = (2\frac{1}{2})^2$ 1
 - Uit het stelsel van deze twee vergelijkingen volgt $4 + 2x - 1 = 6\frac{1}{4}$ (of een andere juiste lineaire vergelijking) 1
 - De x -coördinaat van P is $1\frac{5}{8}$ 1
- of
- $OP = 2\frac{1}{2}$, $MP = 2$ en $OM = 1$, waarbij M het middelpunt van c is 1
 - De cosinusregel in driehoek OMP geeft
$$2^2 = 1^2 + (2\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot \cos(\angle POM), \text{ dus}$$

$$\cos(\angle POM) = \frac{2^2 - 1^2 - (2\frac{1}{2})^2}{-2 \cdot 1 \cdot 2\frac{1}{2}} = \frac{13}{20}$$
- Ook geldt $\cos(\angle POM) = \frac{x_P}{2\frac{1}{2}}$ 1
 - Samen geeft dit $x_P = (\frac{13}{20} \cdot 2\frac{1}{2}) = 1\frac{5}{8}$ 1

12 maximumscore 5

- Uit de gelijkvormigheid van driehoek BRO en driehoek BSA (want $\angle BRO = \angle BSA$ en $\angle OBR = \angle ABS$) (en $AB = 4$ en $OB = 3$) volgt dat de zijden van driehoek BSA $\frac{4}{3}$ keer zo lang zijn als de zijden van driehoek BRO 1
 - Uit de stelling van Pythagoras in driehoek BRO volgt $BR = \sqrt{8}$ 1
 - De oppervlakte van driehoek BRO is $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{8}$ ($= \frac{1}{2}\sqrt{8}$) 1
 - De oppervlakte van driehoek BSA is $(\frac{4}{3})^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{8}$ 1
 - De oppervlakte van vierhoek $AORS$ is $(\frac{4}{3})^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{8} - \frac{1}{2}\sqrt{8} = \frac{7}{18}\sqrt{8}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- of
- Uit de gelijkvormigheid van driehoek BRO en driehoek BSA (want $\angle BRO = \angle BSA$ en $\angle OBR = \angle ABS$) (en $AB = 4$ en $OB = 3$) volgt dat de zijden van driehoek BSA $\frac{4}{3}$ keer zo lang zijn als de zijden van driehoek BRO 1
 - Uit de stelling van Pythagoras in driehoek BRO volgt $BR = \sqrt{8}$ 1
 - Dus $AS = \frac{4}{3}$ en $BS = \frac{4}{3}\sqrt{8}$ 1
 - $RS = (\frac{4}{3}\sqrt{8} - \sqrt{8}) = \frac{1}{3}\sqrt{8}$ 1
 - De oppervlakte van vierhoek $AORS$ is $\frac{1+\frac{4}{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{8} = \frac{7}{18}\sqrt{8}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- of
- De verdeling van vierhoek $AORS$ in driehoek AOQ en rechthoek $QORS$, met Q de loodrechte projectie van O op AS 1
 - Uit de gelijkvormigheid van driehoek BRO en driehoek OQA (want $\angle BRO = \angle OQA$ en $\angle OBR = \angle AOQ$) (en $OB = 3$ en $AO = 1$) volgt dat de zijden van driehoek OQA $\frac{1}{3}$ keer zo lang zijn als de zijden van driehoek BRO 1
 - Dus $AQ = \frac{1}{3}$ 1
 - Uit de stelling van Pythagoras in driehoek OQA volgt $OQ = \sqrt{\frac{8}{9}}$ 1
 - De oppervlakte van vierhoek $AORS$ is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{8}{9}} + 1 \cdot \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{7}{6}\sqrt{\frac{8}{9}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- of

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

- Uit de stelling van Pythagoras in driehoek BRO volgt $BR = \sqrt{8}$ 1
- $\sin(\angle OBR) = \frac{1}{3}$ en $\cos(\angle OBR) = \frac{1}{3}\sqrt{8}$ 1
- $AS = 4 \cdot \sin(\angle OBR) = \frac{4}{3}$ en $BS = 4 \cdot \cos(\angle OBR) = \frac{4}{3}\sqrt{8}$ 1
- $RS = (\frac{4}{3}\sqrt{8} - \sqrt{8}) = \frac{1}{3}\sqrt{8}$ 1
- De oppervlakte van vierhoek $AORS$ is $\frac{1+\frac{4}{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{8} = \frac{7}{18}\sqrt{8}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

Top, asymptoot en geen perforatie

13 maximumscore 4

- (Als er een perforatie is, dan moet in dit geval gelden:) teller en noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan nul 1
 - De noemer is nul als $x^2 = -a$ 1
 - De teller is dan $-a^2 - 2$ 1
 - Een berekening of redenering waaruit volgt dat de vergelijking $-a^2 - 2 = 0$ geen oplossingen heeft
(; dus voor geen waarde van a is er een perforatie) 1
- of
- (Als er een perforatie is, dan moet in dit geval gelden:) teller en noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan nul 1
 - De teller is nul als $x^2 = \frac{2}{a}$ ($a = 0$ voldoet niet) 1
 - De noemer is nul als $x^2 = -a$ 1
 - Een berekening of redenering waaruit volgt dat de vergelijking $\frac{2}{a} = -a$ geen oplossingen heeft (; dus voor geen waarde van a is er een perforatie) 1
- of
- (Als er een perforatie is, dan moet in dit geval gelden:) teller en noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan nul 1
 - De teller is nul als $x^2 = \frac{2}{a}$ ($a = 0$ voldoet niet) 1
 - De noemer is dan $\frac{2}{a} + a$ 1
 - Een berekening of redenering waaruit volgt dat de vergelijking $\frac{2}{a} + a = 0$ geen oplossingen heeft
(; dus voor geen waarde van a is er een perforatie) 1
- of
- (Als er een perforatie is, dan moet in dit geval gelden:) teller en noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan nul 1
 - Een berekening of beredenering waaruit volgt: als $a < 0$ dan kan de teller niet nul zijn 1
 - Een berekening of beredenering waaruit volgt: als $a > 0$ dan kan de noemer niet nul zijn 1
 - Voor $a = 0$ is de teller (gelijk aan -2 , dus) ongelijk aan nul
(; dus voor geen waarde van a is er een perforatie) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

14 maximumscore 6

- $y_T = (f_a(0) =) -\frac{2}{a}$ 1
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 - 2}{x^2 + a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{a}{x^2}}$ 1
- ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^2} = 0$, dus) de limiet is gelijk aan a , dus de horizontale asymptoot is de lijn met vergelijking $y = a$ (of: $y_S = a$) 1
- ($a > 0$ en $-\frac{2}{a} < 0$, dus) $ST = a - -\frac{2}{a}$ (of $ST = a + \frac{2}{a}$) 1
- De afgeleide hiervan is $1 - \frac{2}{a^2}$ 1
- $1 - \frac{2}{a^2} = 0$ geeft $a^2 = 2$, dus $a = \sqrt{2}$ ($a = -\sqrt{2}$ voldoet niet) 1

Vereenvoudigde sterrenkunde

15 maximumscore 2

- $10 = 0,4 + 0,3 \cdot 2^{n-2}$ geeft $2^{n-2} = 32$ 1
- Hieruit volgt $n-2 = 5$, dus $n = 7$ 1

Opmerking

Als door systematisch zoeken de juiste waarde van n wordt gevonden, dan mogen voor deze vraag 2 scorepunten worden toegekend.

16 maximumscore 3

- De cosinusregel in driehoek ZAV geeft
 $1,0^2 = 0,7^2 + d^2 - 2 \cdot 0,7 \cdot d \cdot \cos(\alpha)$ 1
- De cosinusregel in driehoek ZVM geeft
 $1,6^2 = 0,7^2 + d^2 - 2 \cdot 0,7 \cdot d \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$ 1
- Herleiden van deze twee vergelijkingen geeft respectievelijk
 $1,4d \cdot \cos(\alpha) = d^2 - 0,51$ en $1,4d \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = d^2 - 2,07$, dus geldt
 $(1,4d = \frac{d^2 - 0,51}{\cos(\alpha)} = \frac{d^2 - 2,07}{\cos(180^\circ - \alpha)})$ 1

17 maximumscore 3

- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$, dus de vergelijking $d^2 - 0,51 = -d^2 + 2,07$ moet worden opgelost 1
- Hieruit volgt $d^2 = 1,29$ 1
- (Dit geeft $d = 1,135\dots$, dus) het eindantwoord is $d = 1,14$ (AE) 1

of

- De cosinusregel in driehoek ABZ , met B een hoekpunt van het parallelogram $ABMZ$, geeft: $1,6^2 = 1,0^2 + 1,4^2 - 2 \cdot 1,0 \cdot 1,4 \cdot \cos(\angle AZB)$;
hieruit volgt $\cos(\angle AZB) = \frac{1,6^2 - 1,0^2 - 1,4^2}{-2 \cdot 1,0 \cdot 1,4} = 0,1428\dots$ 1
- De cosinusregel in driehoek AVZ geeft
 $d^2 = 1,0^2 + 0,7^2 - 2 \cdot 1,0 \cdot 0,7 \cdot 0,1428\dots = 1,29$ 1
- (Dit geeft $d = 1,135\dots$, dus) het eindantwoord is $d = 1,14$ (AE) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

18 maximumscore 4

- Het gebruiken van coördinaten voor de zon en Jupiter, zoals $Z(0, 0)$ en $J(8 \cdot 10^8, 0)$

1

- Voor het zwaartepunt P geldt

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 10^{30} + 2 \cdot 10^{27}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2 \cdot 10^{27}}{2 \cdot 10^{30} + 2 \cdot 10^{27}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot 10^8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (of)}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2 \cdot 10^{27}}{2 \cdot 10^{30} + 2 \cdot 10^{27}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot 10^8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1

- Hieruit volgt $P \left(\frac{2 \cdot 10^{27} \cdot 8 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{30} + 2 \cdot 10^{27}}, 0 \right)$ (of $x_P = \frac{2 \cdot 10^{27} \cdot 8 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{30} + 2 \cdot 10^{27}}$)

1

- De straal van de baan is $8 \cdot 10^5$ (of 800 000) (km)

1

of

- De straal van de grote cirkel is $8 \cdot 10^8 - r$ (met r de gevraagde straal)

1

- Er moet gelden $r \cdot 2 \cdot 10^{30} = (8 \cdot 10^8 - r) \cdot 2 \cdot 10^{27}$

1

- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost

1

- De straal van de baan is $8 \cdot 10^5$ (of 800 000) (km)

1

Opmerking

Als gewerkt is volgens het eerste antwoordalternatief, mag in het tweede antwoordelement het onderste kental in de vectoren buiten de beoordeling gehouden worden.

Bronvermeldingen

Alle figuren Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2024